

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы
Лекция 1.6

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Непрерывность функции



Непрерывность функции

Определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности $U(a)$ точки a , называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$



Непрерывность функции

Эквивалентное определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности $U(a)$ точки a , называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$



Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a .



Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a .

Замечание



Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a .

Замечание

Непрерывность функции предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности точки a , включая саму точку a .



Непрерывность функции

Геометрическая интерпретация



Непрерывность функции

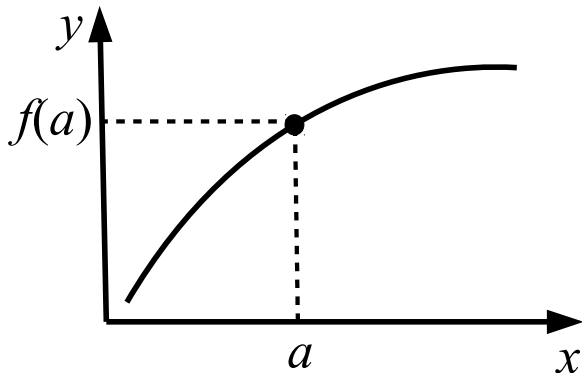
Геометрическая интерпретация

Графически непрерывность функции в точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a



Непрерывность функции

Геометрическая интерпретация



Непрерывность функции

\Leftrightarrow - знак равносильности и эквивалентности.



Непрерывность функции

\Leftrightarrow - знак равносильности и эквивалентности.
Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как



Непрерывность функции

\Leftrightarrow - знак равносильности и эквивалентности.

Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

1) необходимо и достаточно,



Непрерывность функции

\Leftrightarrow - знак равносильности и эквивалентности.

Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

- 1) необходимо и достаточно,
- 2) тогда и только тогда, когда.



Непрерывность функции

Пример:



Непрерывность функции

Пример: Выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как



Непрерывность функции

Пример: Выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как
1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B .



Непрерывность функции

Пример: Выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как

1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B .
2. Для справедливости утверждения A необходимо и достаточно справедливость утверждения B .



Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:



Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

1) $A \Rightarrow B$ - если справедливо A , то справедливо B (необходимость),



Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

- 1) $A \Rightarrow B$ - если справедливо A , то справедливо B (необходимость),
- 2) $A \Leftarrow B$ - если справедливо B , то справедливо A (достаточность).



Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

- 1) $A \Rightarrow B$ - если справедливо A , то справедливо B (необходимость),
- 2) $A \Leftarrow B$ - если справедливо B , то справедливо A (достаточность).

Другими словами, утверждения A и B справедливы или нет одновременно.



Непрерывность функции

Введем обозначения:



Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение аргумента,



Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение аргумента,

$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ - приращение функции
в точке a .



Непрерывность функции

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**



Непрерывность функции

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**

$$f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$



Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:



Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a



Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

\Leftrightarrow - необходимо и достаточно, чтобы



Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

\Leftrightarrow - необходимо и достаточно, чтобы

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ - предел приращения функции равнялся нулю при стремлении к нулю приращения аргумента



Непрерывность функции

Доказательство



Непрерывность функции

Доказательство

1) необходимость



Непрерывность функции

Доказательство

1) необходимость

Дано: $f(x) \in C(a)$



Непрерывность функции

Доказательство

1) необходимость

Дано: $f(x) \in C(a)$

Доказать: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a \Rightarrow$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow$$

$$f(x) - f(a) =$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow$$

$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) =$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow$$

$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f.$$



Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:



Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \\ |\Delta f| < \varepsilon.$$



Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \\ |\Delta f| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$.



2) достаточность



2) достаточность

Дано: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$



Непрерывность функции

2) достаточность

Дано: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$

Доказать: $f(x) \in C(a)$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

Так как



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

Так как

$$\Delta x = x - a,$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

Так как

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) =$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

Так как

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a),$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

Так как

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a),$$

то



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

Так как

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a),$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

Так как

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a),$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow f(x) \in C(a). \blacksquare$$



Односторонняя непрерывность



Односторонняя непрерывность

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, c]$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева** в точке c , если

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c).$$



Односторонняя непрерывность

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[c, b)$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** в точке c , если

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c).$$



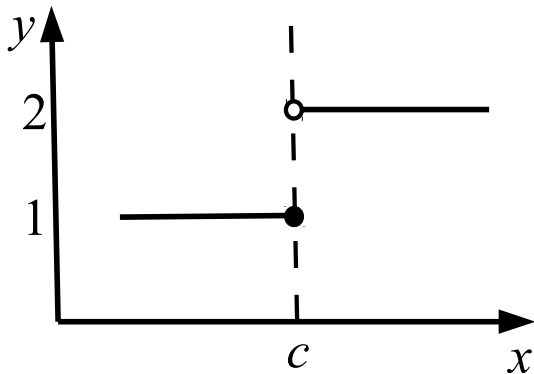
Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:



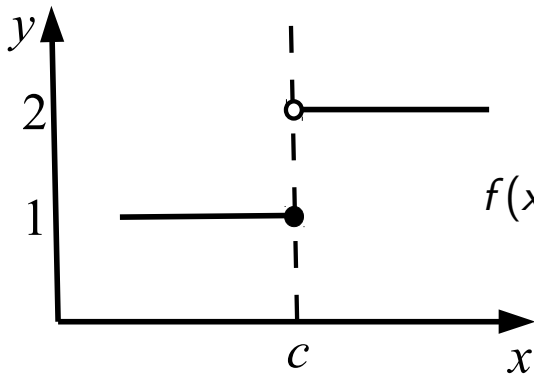
Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:



Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq c \\ 2, & x > c \end{cases}$$



Точки разрыва



Определение

Точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке a или определена, но не является в ней непрерывной.



Точки разрыва

Классификация точек разрыва



Точки разрыва

Классификация точек разрыва

1. Если a - точка разрыва функции $f(x)$ и существуют конечные пределы

$$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x),$$

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

то точка a называется **точкой разрыва первого рода**.



Точки разрыва

Классификация точек разрыва

2. Если a - точка разрыва первого рода и

$$f(a - 0) = f(a + 0),$$

то a называется **точкой устранимого разрыва**.



Классификация точек разрыва

3. Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется **точкой разрыва второго рода**.



Точки разрыва

Примеры:



Точки разрыва

Примеры:

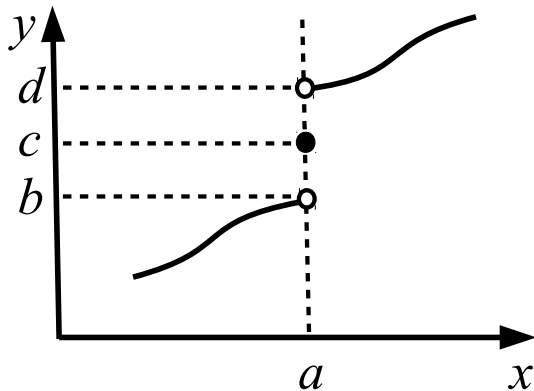
1) точка разрыва 1-ого рода



Точки разрыва

Примеры:

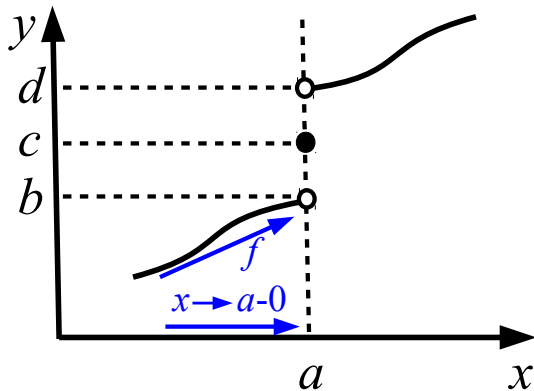
1) точка разрыва 1-ого рода



Точки разрыва

Примеры:

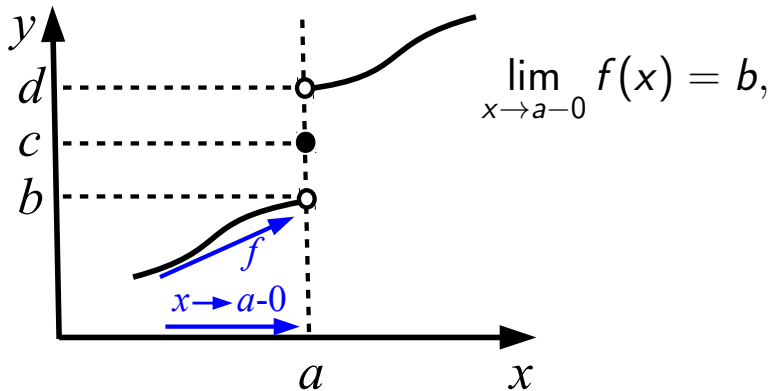
1) точка разрыва 1-ого рода



Точки разрыва

Примеры:

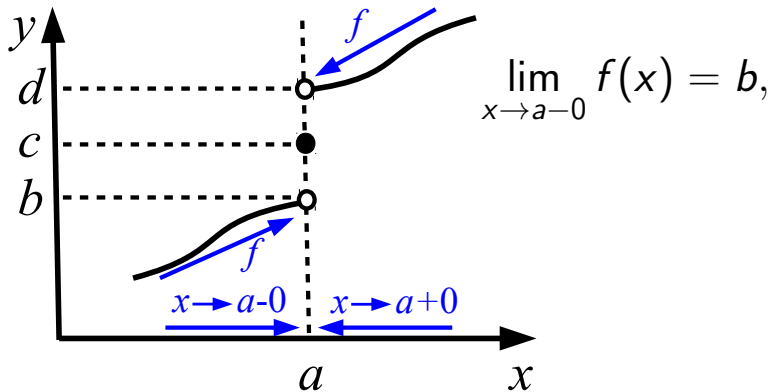
1) точка разрыва 1-ого рода



Точки разрыва

Примеры:

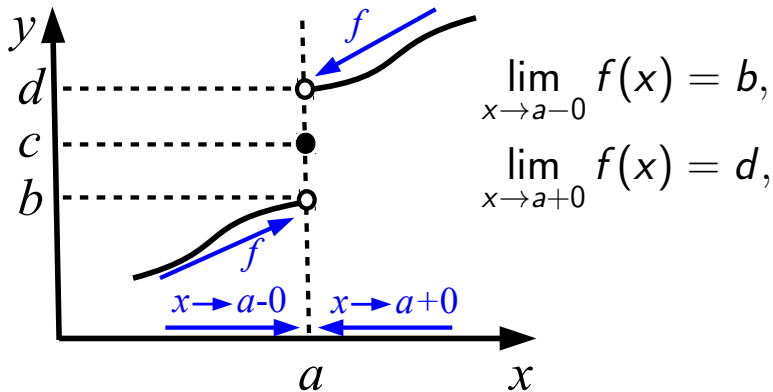
1) точка разрыва 1-ого рода



Точки разрыва

Примеры:

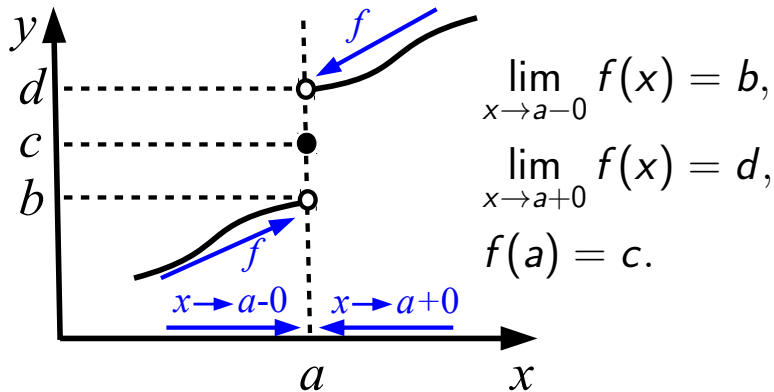
1) точка разрыва 1-ого рода



Точки разрыва

Примеры:

1) точка разрыва 1-ого рода



Точки разрыва

Примеры:

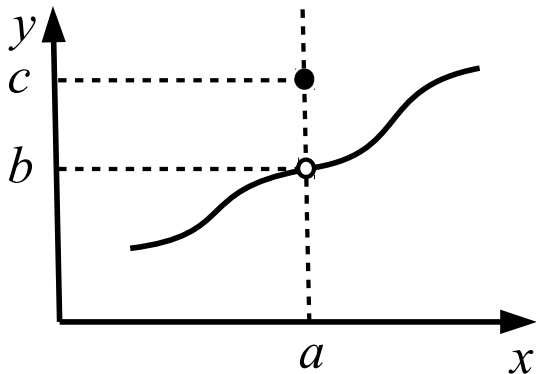
2) точка устранимого разрыва



Точки разрыва

Примеры:

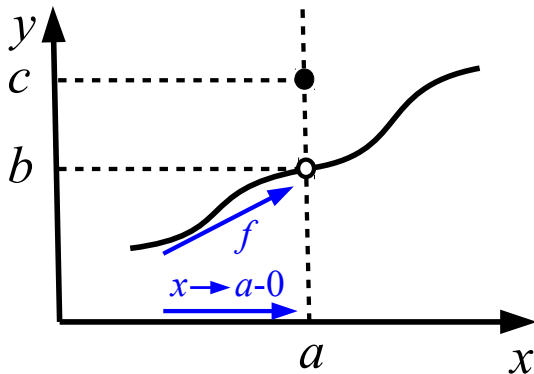
2) точка устранимого разрыва



Точки разрыва

Примеры:

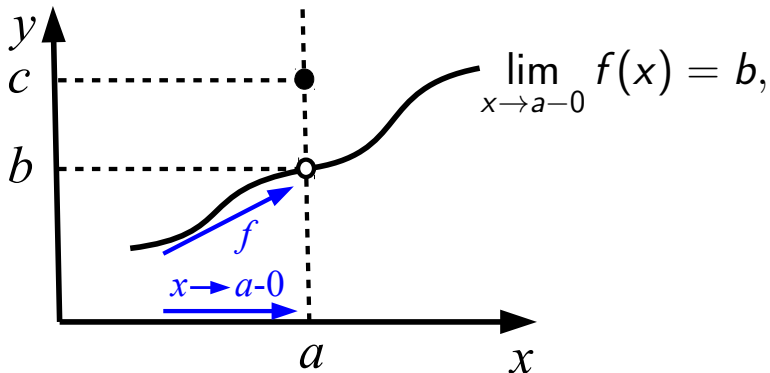
2) точка устранимого разрыва



Точки разрыва

Примеры:

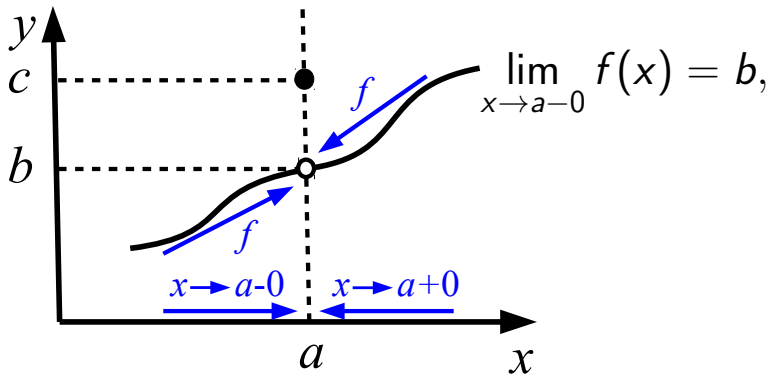
2) точка устранимого разрыва



Точки разрыва

Примеры:

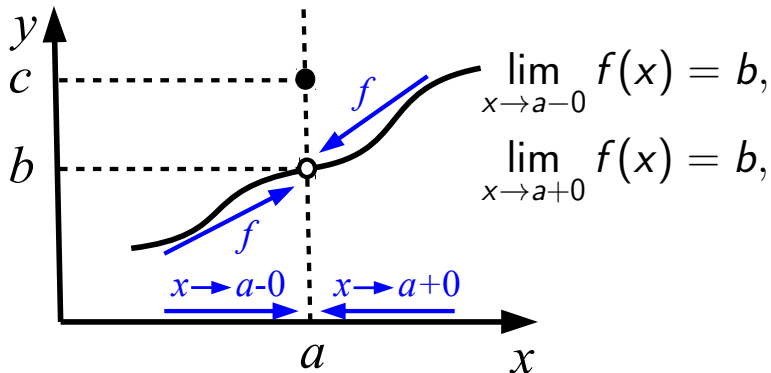
2) точка устранимого разрыва



Точки разрыва

Примеры:

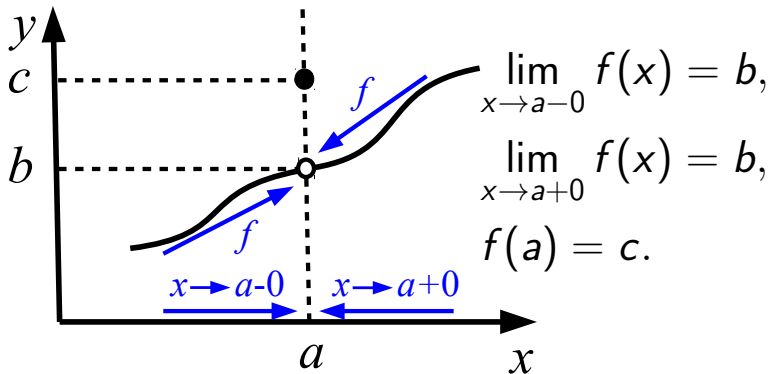
2) точка устранимого разрыва



Точки разрыва

Примеры:

2) точка устранимого разрыва



Точки разрыва

Примеры:

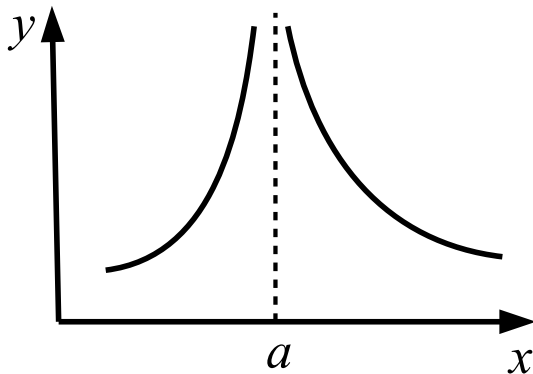
3) точка разрыва 2-ого рода



Точки разрыва

Примеры:

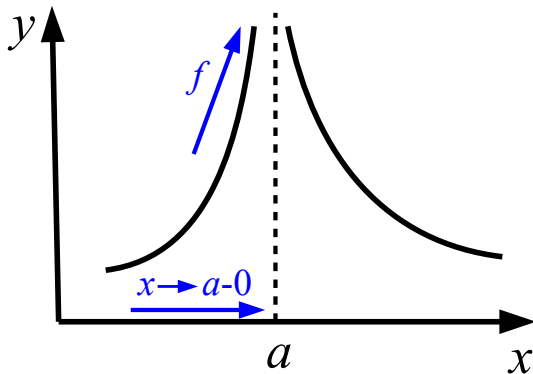
3) точка разрыва 2-ого рода



Точки разрыва

Примеры:

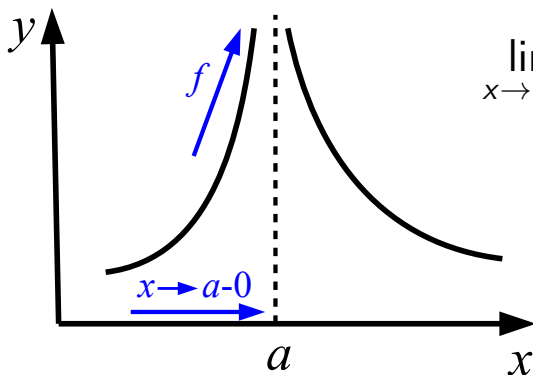
3) точка разрыва 2-ого рода



Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва 2-ого рода



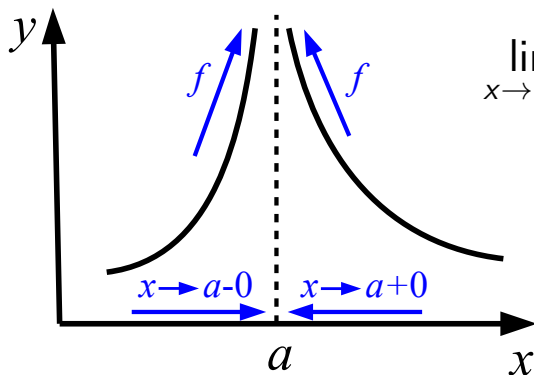
$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty,$$



Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва 2-ого рода



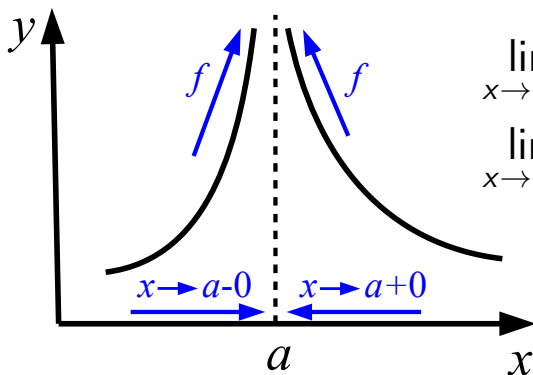
$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty,$$



Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва 2-ого рода



$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty,$$

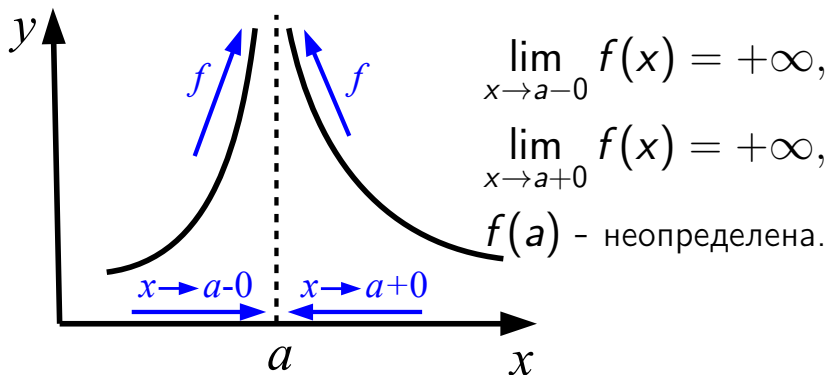
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty,$$



Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва 2-ого рода



Свойства функций, непрерывных в точке



Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)



*Теорема (арифметические свойства
непрерывных функций)*

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то



*Теорема (арифметические свойства
непрерывных функций)*

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f + g \in C(a)$



*Теорема (арифметические свойства
непрерывных функций)*

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f + g \in C(a)$

2) $f \cdot g \in C(a)$



Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f + g \in C(a)$

2) $f \cdot g \in C(a)$

3) $f/g \in C(a)$, если $g(a) \neq 0$



Теорема (непрерывность сложной функции)



Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (непрерывность сложной функции)
Если $f(x) \in C(a)$ и $g(y) \in C(b)$, где $b = f(a)$,
то $g(f(x)) \in C(a)$.



*Теорема (непрерывность основных
элементарных функций)**



Свойства функций, непрерывных в точке

*Теорема (непрерывность основных элементарных функций)**

Основные элементарные функции непрерывны всюду в их области определения.



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f =$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) =$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\ &= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} =\end{aligned}$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\&= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\&= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\ &= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f =$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\&= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\&= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\&= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\&= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\&= |\text{бесконечно малая} \cdot \text{ограниченная} = \\&\text{бесконечно малая}| \end{aligned}$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\&= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\&= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\&= |\text{бесконечно малая} \cdot \text{ограниченная}| = \\&= |\text{бесконечно малая}| = 0\end{aligned}$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\ &= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\ &= |\text{бесконечно малая} \cdot \text{ограниченная}| = \\ &= |\text{бесконечно малая}| = 0 \\ \Rightarrow \sin x &\in C(x). \blacksquare\end{aligned}$$



Теорема (непрерывность элементарной функции)



Теорема (непрерывность элементарной функции)

Любая элементарная функция непрерывна в любой точке области ее определения.

